

เอกสารประกอบการเรียนรู้
รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ลำดับและอนุกรม

โดย

นางสาวนงศ์เพ็ญ ทองเลิศ

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนศึกษานารี

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 1

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนศึกษานารี ให้มีประสิทธิภาพ สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษา ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ ให้เป็นมนุษย์ที่มีความสมดุล ทั้งด้านร่างกาย ความรู้ คุณธรรม มีจิตสำนึกในความเป็นพลเมืองไทย และเป็นพลโลก ยึดมั่นในการปกครอง ตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข มีความรู้และทักษะพื้นฐาน รวมทั้ง เจตคติ ที่จำเป็นต่อการศึกษาต่อ การประกอบอาชีพ และการศึกษาตลอดชีวิต

เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้จำนวน 2 หน่วย ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 : ลำดับและอนุกรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 : ความน่าจะเป็น

ภายในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ประกอบด้วย เนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกทักษะ กิจกรรมจำลอง สถานการณ์ เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้ตอนท้ายบทเรียนของแต่ละหัวข้อ แต่ละหน่วยการเรียนรู้จะมีแบบทดสอบพร้อมเฉลยวิธีทำ อย่างละเอียด เพื่อให้นักเรียนได้ทดสอบความรู้ ตรวจสอบความถูกต้อง และทำความเข้าใจได้ด้วย ตนเอง

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จะทำให้นักเรียนตระหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น เรียนวิชา คณิตศาสตร์อย่างมีความสุข สามารถพัฒนาตนเองโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ และนำความรู้ไปใช้ แก้ปัญหา สถานการณ์ต่าง ๆ ที่พบในชีวิตประจำวันได้

นงค์เพ็ญ ทองเลิศ

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ดังนี้

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะสำคัญ 5 ประการ

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา
4. ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต
5. ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณลักษณะอันพึงประสงค์ เพื่อให้สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นในสังคมได้อย่างมีความสุข ในฐานะเป็นพลเมืองไทยและพลโลกดังนี้

1. รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์
2. ซื่อสัตย์สุจริต
3. มีวินัย
4. ใฝ่เรียนรู้
5. อยู่อย่างพอเพียง
6. มุ่งมั่นในการทำงาน
7. รักความเป็นไทย
8. มีจิตสาธารณะ

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ (ที่เกี่ยวข้อง)

- สาระที่ 4 พีชคณิต**
- มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
- มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา
- สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น**
- มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล
- มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา
- สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**
- มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง (ที่เกี่ยวข้อง)

รหัสตัวชี้วัด ช่วงชั้น	ตัวชี้วัด
ค 4.1 ม.4-6/4	เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด
ค 4.1 ม.4-6/5	เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต และนำไปใช้
ค 4.2 ม.4-6/6	เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้
ค 5.2 ม.4-6/2	อธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และนำผลที่ได้ไปใช้ คาดการณ์ในสถานการณ์ที่กำหนดให้
ค 5.3 ม.4-6/2	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา
ค 6.1 ม.4-6/1	ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา
ค 6.1 ม.4-6/2	ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหา ในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม
ค 6.1 ม.4-6/3	ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม
ค 6.1 ม.4-6/4	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน
ค 6.1 ม.4-6/5	เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ
ค 6.1 ม.4-6/6	มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คำแนะนำการใช้สำหรับครู

คำชี้แจง เอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ใช้ประกอบการกิจกรรมการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ในรูปแบบการเรียนรู้แบบมีส่วนร่วมระหว่างครู และนักเรียนโดยยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางแห่งการเรียนรู้ มีวิธีใช้ดังนี้

1. เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถใช้ได้หลายลักษณะด้วยกันคือ สอนเพื่อความรู้ใหม่ สอนเพื่อทบทวนบทเรียน หรือสอนเพื่อซ่อมเสริม

2. การจัดการเรียนรู้เน้นให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยครูมีหน้าที่จัดหา สื่อการเรียนรู้ ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่เหมาะสมสอดคล้องกับหลักสูตร ตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน พร้อมให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนประสบปัญหาในการเรียนรู้

3. ในการนำเอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูผู้สอนควรแนะนำถึงลักษณะต่างๆ ไปของเอกสารให้นักเรียน เข้าใจก่อนนำมาใช้ ดังนี้

3.1 เอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้จำนวน 2 หน่วย ดังนี้

- 1) หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 : ลำดับและอนุกรม
- 2) หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 : ความน่าจะเป็น

3.2 ภายในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ประกอบด้วย

- 1) เนื้อหา และ ตัวอย่าง
- 2) แบบฝึกทักษะ
- 3) กิจกรรมจำลองสถานการณ์
- 4) แบบทดสอบแต่ละหัวข้อ และแบบทดสอบท้ายหน่วย

4. ก่อนเริ่มเรียนการเรียนรู้ให้นักเรียนทำการทดสอบความรู้ก่อนเรียนเพื่อวัดและประเมินผล การเรียนรู้ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

5. เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหา และตัวอย่างแล้วครูผู้สอนต้องตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนโดยการถามตอบ ให้นักเรียนร่วมกันสรุปเนื้อหาให้ถูกต้อง ชัดเจน เมื่อเห็นว่านักเรียนเข้าใจ เนื้อหาดีแล้วจึงให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะในแต่ละหัวข้อ จากนั้นสมาชิกในห้องเรียนทุกคนช่วยกัน ตรวจสอบคำตอบกับคำตอบของตนเองและเฉลยในภาคผนวก

6. การทำกิจกรรมจำลองสถานการณ์ จัดให้มีการแบ่งกลุ่ม 2 ลักษณะดังนี้
 - 6.1 ทำเป็นคู่ ใช้การสุ่มจับคู่ระหว่างนักเรียนในกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน
 - 6.2 ทำเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน โดยแต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน ในอัตราส่วน 1:2:1 ตามลำดับ โดยให้นักเรียนในกลุ่มเก่งทำหน้าที่เป็นพี่เลี้ยง จากนั้นสุ่มให้นักเรียนในกลุ่มอ่อนทำหน้าที่เฉลยและอธิบายเพื่อนหน้าชั้นเรียนโดยสมาชิกในห้องเรียนทุกคน และครู ร่วมกันตรวจกับคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก
7. เมื่อเรียนจบแต่ละหัวข้อให้นักเรียนทำแบบทดสอบแต่ละหัวข้อด้วยตนเองแล้วตรวจสอบคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก
8. เมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบท้ายหน่วยการเรียนรู้ด้วยตนเองแล้วตรวจสอบคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก
9. เมื่อจบกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนทำการทดสอบความรู้หลังเรียน เพื่อวัดและประเมินผลการเรียนรู้หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
10. ตรวจสอบความก้าวหน้าของนักเรียนจากคะแนนการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ก่อนและหลังเรียน



คำชี้แจงสำหรับนักเรียนในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

ภายในเอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ 2 หน่วย ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลำดับและอนุกรม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ความน่าจะเป็น

การเรียนรู้ด้วยตนเองให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหา ตัวอย่าง
2. ทำแบบฝึกทักษะ (ตรวจคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก ในกรณีที่มีข้อที่ไม่ถูกต้องให้กลับไปทำความเข้าใจเนื้อหาและตัวอย่างของหัวข้อนั้นๆ แล้วแก้ไขให้ถูกต้อง)
3. ทำกิจกรรมจำลองสถานการณ์ (ตรวจคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก ในกรณีที่มีข้อที่ไม่ถูกต้องให้กลับไปทำความเข้าใจเนื้อหาและตัวอย่างของหัวข้อนั้นๆ แล้วแก้ไขให้ถูกต้อง)
4. เมื่อจบแต่ละหัวข้อทำแบบทดสอบย่อย (ตรวจคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก ในกรณีที่มีข้อที่ไม่ถูกต้องให้กลับไปทำความเข้าใจเนื้อหาและตัวอย่างของหัวข้อนั้นๆ แล้วแก้ไขให้ถูกต้อง)
5. เมื่อจบแต่ละหน่วยทำแบบทดสอบท้ายหน่วย (ตรวจคำตอบกับเฉลยในภาคผนวก ในกรณีที่มีข้อที่ไม่ถูกต้องให้กลับไปทำความเข้าใจเนื้อหาและตัวอย่างของหน่วยนั้นๆ แล้วแก้ไขให้ถูกต้อง)



➤ ทบทวนฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่ใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

- | | | |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1) | $r = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4)\}$ | เป็นฟังก์ชัน |
| 2) | $r = \{(3, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 8)\}$ | ไม่เป็นฟังก์ชัน |
| 3) | $r = \{(-3, 4), (-4, 5), (3, 6), (4, 8)\}$ | เป็นฟังก์ชัน |
| 4) | $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x + 2\}$
$= \{(1, 4), (2, 6), (3, 8), \dots\}$ | เป็นฟังก์ชัน |
| 5) | $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = \frac{x}{2}\}$
$= \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), \dots\}$ | เป็นฟังก์ชัน |

โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในฟังก์ชัน

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

- | | | |
|----|---------------------------------------------------------------------|----------|
| 1) | $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ | |
| | โดเมน คือ $\{1, 2, 3, 4\}$ และ เรนจ์ คือ $\{2, 4, 6, 8\}$ | |
| 2) | $f = \{(2, 8), (3, 12), (4, 16), (5, 20)\}$ | |
| | โดเมน คือ $\{2, 3, 4, 5\}$ และ เรนจ์ คือ $\{8, 12, 16, 20\}$ | |
| 3) | $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 4x + 2\}$ | |
| | ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = 4(1) + 2 = 6$ | |
| | ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = 4(2) + 2 = 10$ | |
| | ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 4(3) + 2 = 14$ | |
| | \vdots | \vdots |
| | ดังนั้น $f = \{(1, 6), (2, 10), (3, 14), \dots\}$ | |
| | โดเมน คือ $\{1, 2, 3, \dots\}$ และ เรนจ์ คือ $\{6, 10, 14, \dots\}$ | |

➤ แบบฝึกทักษะทบทวนฟังก์ชัน



1. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1) $r = \{(2, 6), (2, 7), (8, 9), (10, 11)\}$

2) $r = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), (-4, 4)\}$

3) $r = \{(3, 4), (-3, 5), (5, 6), (6, 8)\}$

4) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = -2x + 5\}$

$= \{(1, 3), (2, 1)\}$

5) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = \frac{x}{4}\}$

$= \{(4, 1), (8, 2), (12, 3), \dots\}$

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
1) $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), (5, 32)\}$		
2) $f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32)\}$		
3) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 5x + 1\}$		
4) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^3\}$		
5) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = \frac{x}{3}\}$		

3. กำหนด $f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x + 3\}$ จงหา

1) $f(1) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2) $f(2) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3) $f(3) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4) $f(n + 1) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$



หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

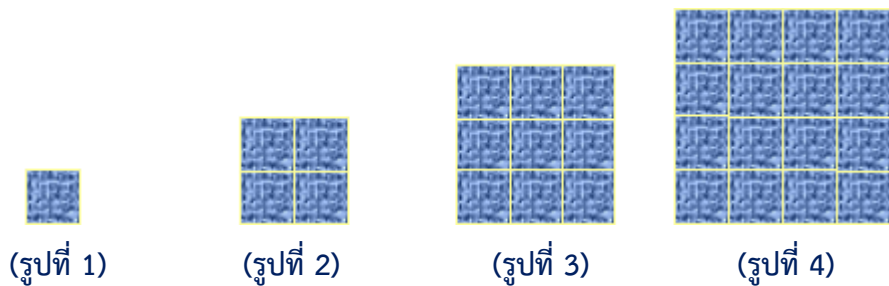
1.1 ลำดับ (Sequence)


1.1.1 ความหมายของลำดับ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก หรือสับเซตของจำนวนเต็มบวกในรูป $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เรียกว่า ลำดับ

พิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

สถานการณ์ 1 ช่างก่อสร้างต้องการติดกระเบื้องบนผนังบ้านตามแบบรูปด้านล่างนี้



กำหนดให้  แทนพื้นที่ติดกระเบื้อง 1 ตารางหน่วย จะพบว่าลำดับของรูป และพื้นที่ติดกระเบื้องในแต่ละรูปมีความสัมพันธ์กันดังนี้

รูปที่	1	2	3	4
พื้นที่ติดกระเบื้อง (ตารางหน่วย)	1	4	9	16

จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของรูปและพื้นที่ติดกระเบื้องในแต่ละรูปเป็น ฟังก์ชัน $\{(1,1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ ที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{1, 4, 9, 16\}$

สถานการณ์ 2 รักษาออมเงินทุกเดือน เดือนละ 100 บาท ทำให้เขามีจำนวนเงินออมสะสมในแต่ละเดือนดังแบบรูปของจำนวน 100, 200, 300, 400, ... จะพบว่าลำดับของเดือนที่ออมและจำนวนเงินออมสะสมในแต่ละเดือนมีความสัมพันธ์กันดังนี้

เดือนที่	1	2	3	4	...
เงินออมสะสม (บาท)	100	200	300	400	...

จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของเดือนที่ออมและจำนวนเงินออมสะสมในแต่ละเดือนเป็นฟังก์ชัน $\{(1,100), (2, 200), (3, 300), (4, 400), \dots\}$ ที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{100, 200, 300, 400, \dots\}$

บทนิยาม ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า ลำดับจำกัด (finite sequence) และ เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ที่สามของลำดับ $a_n = (-2)^{n-1}$

แนวคิด แทนค่า $n = 3$ ใน $a_n = (-2)^{n-1}$

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = (-2)^{n-1}$
 จะได้ $a_3 = (-2)^{3-1} = (-2)^2 = 4$
 ดังนั้น พจน์ที่สามของลำดับ a_n คือ 4

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \\ \frac{n}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \end{cases}$

แนวคิด หา a_1 โดยแทนค่า $n = 1$ ใน $a_n = 2n$

หา a_2 โดยแทนค่า $n = 2$ ใน $a_n = \frac{n}{2}$

หา a_3 โดยแทนค่า $n = 3$ ใน $a_n = 2n$

หา a_4 โดยแทนค่า $n = 4$ ใน $a_n = \frac{n}{2}$

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \\ \frac{n}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \end{cases}$

จะได้ $a_1 = 2n = 2(1) = 2$

$a_2 = \frac{n}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$a_3 = 2n = 2(3) = 6$

$a_4 = \frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับ a_n คือ 2, 1, 6, 2

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนลำดับจำกัด $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ โดยการแจกแจง

แนวคิด แทนค่า $n = 1, 2, 3, 4$ ใน $a_n = \frac{n}{n+1}$

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\text{จะได้ } a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกแจงได้ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนลำดับอนันต์ $a_n = 3n + 1$ โดยการแจกแจง

แนวคิด แทนค่า $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ใน $a_n = 3n + 1$

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = 3n + 1$

$$\text{จะได้ } a_1 = 3(1) + 1 = 4$$

$$a_2 = 3(2) + 1 = 7$$

$$a_3 = 3(3) + 1 = 10$$

$$a_4 = 3(4) + 1 = 13$$

\vdots

ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกแจงได้ $4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1, \dots$

▲ ข้อตกลง 1. ในกรณีที่กำหนดลำดับโดยพจน์ทั่วไป ถ้าไม่ได้ระบุสมาชิกในโดเมนให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

2. ในการกำหนดลำดับอนันต์โดยการแจกแจงจะเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้กับการ

เขียนลำดับเสมอ เช่น $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \dots$ ยกเว้นในกรณีที่ระบุได้ว่าลำดับอนันต์มีสมบัติ

เฉพาะที่ทราบกัน เช่น $2, 4, 6, 8, \dots$ ซึ่งการหาพจน์ทั่วไปของลำดับจะอยู่ใน หัวข้อ 1.1.2 ต่อไป

➤ แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.1 (ก)



1. จงเขียนลำดับจำกัด $a_n = 2n - 1$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3\}$ โดยการแจกพจน์

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงเขียนลำดับอนันต์ $a_n = (-3)^{n-1}$ โดยการแจกพจน์

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงเขียนลำดับต่อไปนี้โดยการแจกพจน์

พจน์ทั่วไป	ลำดับโดยการแจกพจน์
1) $a_n = 3n - 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$	
2) $a_n = (-2)^n$	
3) $a_n = -3n + 1$	
4) $a_n = 5n - 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 100$	
5) $a_n = \frac{2n}{2^n}$	
6) $a_n = \frac{2n}{(-2)^n}$	
7) $a_n = \frac{3n - 1}{-3n + 1}$	
8) $a_n = \frac{3n - 1}{5n - 1}$	

➤ ลำดับฟีโบนักชี (ความรู้เพิ่มเติมที่น่าสนใจ)

ลำดับฟีโบนักชี เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{เมื่อ } n \geq 3$$

เช่น ลำดับ 1, 1, 2, 3, 5, ...

ผู้ที่ค้นพบความสัมพันธ์ของจำนวนในลำดับนี้ คือ เลโอนาโดแห่งปิซา (Leonardo de Pisa) พ่อค้าชาวอิตาลี ซึ่งมีสมญานามว่า ฟีโบนักชี (Fibonacci)

ตัวอย่างที่ 7 จงหาห้าพจน์แรกของลำดับ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$, $a_1 = 5$ และ

$$a_2 = 6$$

แนวคิด หา a_n เมื่อ $n \geq 3$ โดยหาผลบวกสองพจน์ติดกันที่อยู่ก่อนหน้า

วิธีทำ จาก $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 5$ และ $a_2 = 6$

$$\text{จะได้ } a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 6 + 5 = 11$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 11 + 6 = 17$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 17 + 11 = 28$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับ a_n คือ 5, 6, 11, 17, 28

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนลำดับ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$, $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$

โดยการแจกพจน์

แนวคิด หา a_n เมื่อ $n \geq 3$ โดยหาผลบวกสองพจน์ติดกันที่อยู่ก่อนหน้า

วิธีทำ จาก $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$

$$\text{จะได้ } a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

⋮

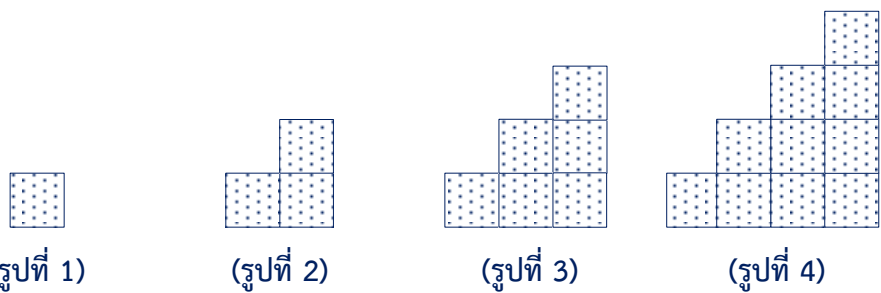
ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกพจน์ได้ 1, 2, 3, 5, 8, ...

กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 1.1.1



- จุดประสงค์ : พัฒนาสมรรถนะสำคัญ และคุณลักษณะอันพึงประสงค์
- เนื้อหา : ความหมายของลำดับ
- การแบ่งกลุ่ม : ทำเป็นคู่
- วิธีปฏิบัติ : ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่าง ในหัวข้อ 1.1.1 และ ทำกิจกรรมที่ 1.1.1

สถานการณ์ 1 นักออกแบบ คนหนึ่งออกแบบการติดกระเบื้องดังแบบรูปด้านล่างนี้



กำหนดให้ แทนกระเบื้องจำนวน 4 แผ่น
จงเติมจำนวนหรือข้อความลงช่องว่างให้สมบูรณ์

รูปที่	1	2	3	4	5	6
จำนวนกระเบื้อง (แผ่น)						

ดังนั้น สามารถเขียนแสดงจำนวนกระเบื้องในแต่ละรูปตั้งแต่รูปที่ 1 ถึงรูปที่ 6
เป็นลำดับจำกัด

สถานการณ์ 2 ผู้จัดการแสดง จัดที่นั่งสำหรับผู้เข้าชมการแสดงในโรงละครแห่งหนึ่ง ดังนี้ แถวที่หนึ่ง 20 ที่นั่ง แถวที่สอง 22 ที่นั่ง แถวที่สาม 24 ที่นั่ง และเพิ่มที่นั่งแถวละ 2 ที่นั่ง
เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงเติมจำนวนหรือข้อความลงช่องว่างให้สมบูรณ์

แถวที่	1	2	3	4	5	...
จำนวนที่นั่ง (ที่นั่ง)						

ดังนั้น สามารถเขียนแสดงจำนวนที่นั่งในแต่ละแถวตั้งแต่แถวที่ 1 ไปเรื่อยๆ
เป็นลำดับอนันต์

➤ เฉลย แบบฝึกทักษะทบทวนฟังก์ชัน



1. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1) $r = \{(2, 6), (2, 7), (8, 9), (10, 11)\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน

2) $r = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), (-4, 4)\}$

เป็นฟังก์ชัน

3) $r = \{(3, 4), (-3, 5), (5, 6), (6, 8)\}$

เป็นฟังก์ชัน

4) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = -2x + 5\}$
 $= \{(1, 3), (2, 1)\}$

เป็นฟังก์ชัน

5) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = \frac{x}{4}\}$
 $= \{(4, 1), (8, 2), (12, 3), \dots\}$

เป็นฟังก์ชัน

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
1) $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), (5, 32)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{2, 4, 8, 16, 32\}$
2) $f = \{(3, 8), (4, 16), (5, 32)\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{8, 16, 32\}$
3) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 5x + 1\}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	$\{6, 11, 16, 21, \dots\}$
4) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^3\}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	$\{1, 8, 27, 64, \dots\}$
5) $f = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = \frac{x}{3}\}$	$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

3. กำหนด $f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x + 3\}$ จงหา

1) $f(1) = 2(1) + 3$
 $= 5$

2) $f(2) = 2(2) + 3$
 $= 7$

3) $f(3) = 2(3) + 3$
 $= 9$

4) $f(n + 1) = 2(n + 1) + 3$
 $= 2n + 2 + 3$
 $= 2n + 5$

➤ เฉลย แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.1 (ก)



1. จงเขียนลำดับจำกัด $a_n = 2n - 1$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3\}$ โดยการแจกพจน์

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = 2n - 1$
 จะได้

$$a_1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$$

ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกพจน์ได้ 1, 3, 5

2. จงเขียนลำดับอนันต์ $a_n = (-3)^{n-1}$ โดยการแจกพจน์

วิธีทำ จากโจทย์ $a_n = (-3)^{n-1}$
 จะได้

$$a_1 = (-3)^{1-1} = (-3)^0 = 1$$

$$a_2 = (-3)^{2-1} = (-3)^1 = -3$$

$$a_3 = (-3)^{3-1} = (-3)^2 = 9$$

$$\vdots$$

ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกพจน์ได้ 1, -3, 9, ..., $(-3)^{n-1}$, ...

3. จงเขียนลำดับต่อไปนี้โดยการแจกพจน์

พจน์ทั่วไป	ลำดับโดยการแจกพจน์
1) $a_n = 3n - 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$	2, 5, 8, 11
2) $a_n = (-2)^n$	-2, 4, -8, 16, ..., $(-2)^n$, ...
3) $a_n = -3n + 1$	-2, -5, -8, -11, ..., $-3n + 1$, ...
4) $a_n = 5n - 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 100$	4, 9, 14, 19, ..., 499
5) $a_n = \frac{2n}{2^n}$	1, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{2n}{2^n}$, ...
6) $a_n = \frac{2n}{(-2)^n}$	-1, 1, $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{2n}{(-2)^n}$, ...
7) $a_n = \frac{3n-1}{-3n+1}$	-1, -1, -1, -1, ..., $\frac{3n-1}{-3n+1}$, ...
8) $a_n = \frac{3n-1}{5n-1}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{19}$, ..., $\frac{3n-1}{5n-1}$, ...

➤ เฉลย แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.1 (ข)



1. จงหาหกพจน์แรกของลำดับ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$, $a_1 = 1$ และ $a_2 = 1$

วิธีทำ จาก $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 1$ และ $a_2 = 1$

$$\text{จะได้ } a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

ดังนั้น หกพจน์แรกของลำดับ a_n คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8

2. จงเขียนลำดับ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$, $a_1 = 5$ และ $a_2 = 5$

โดยการแจกพจน์

วิธีทำ จาก $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 5$ และ $a_2 = 5$

$$\text{จะได้ } a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 5 + 5 = 10$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 10 + 5 = 15$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 15 + 10 = 25$$

⋮

ดังนั้น เขียนลำดับ a_n โดยการแจกพจน์ได้ 5, 5, 10, 15, 25, ...

3. จงยกตัวอย่างลำดับฟีโบนัชชี เช่น 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

เฉลยในชั้นเรียน

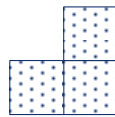
เฉลย กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 1.1.1



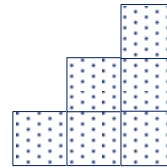
สถานการณ์ 1 นักออกแบบคนหนึ่งออกแบบการติดกระเบื้องดังแบบรูปด้านล่างนี้



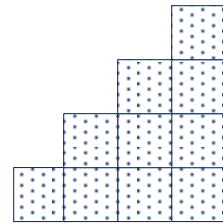
(รูปที่ 1)




(รูปที่ 2)



(รูปที่ 3)



(รูปที่ 4)

กำหนดให้  แทนกระเบื้องจำนวน 4 แผ่น

จงเติมจำนวนหรือข้อความลงช่องว่างให้สมบูรณ์

รูปที่	1	2	3	4	5	6
จำนวนกระเบื้อง (แผ่น)	4	12	24	40	60	84

ดังนั้น สามารถเขียนแสดงจำนวนกระเบื้องในแต่ละรูปตั้งแต่รูป 1 ถึงรูปที่ 6

เป็นลำดับจำกัด 4, 12, 24, 40, 60, 84

สถานการณ์ 2 ผู้จัดการแสดงจัดที่นั่งสำหรับผู้เข้าชมการแสดงในโรงละครแห่งหนึ่ง ดังนี้ แถวที่หนึ่ง 20 ที่นั่ง แถวที่สอง 22 ที่นั่ง แถวที่สาม 24 ที่นั่ง และเพิ่มที่นั่งแถวละ 2 ที่นั่ง เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงเติมจำนวนหรือข้อความลงช่องว่างให้สมบูรณ์

แถวที่	1	2	3	4	5	...
จำนวนที่นั่ง (ที่นั่ง)	20	22	24	26	28	...

ดังนั้น สามารถเขียนแสดงจำนวนที่นั่งในแต่ละแถวตั้งแต่แถวที่ 1 ไปเรื่อยๆ

เป็นลำดับอนันต์ 20, 22, 24, 26, 28, ...

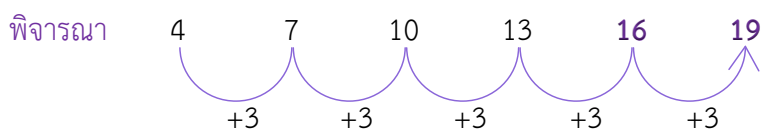
1.1.2 การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ การเขียนแสดงพจน์ทั่วไปในรูปที่มี n เป็นตัวแปร และ เมื่อแทน n ในเซตของสมาชิก $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ แล้วได้พจน์ที่ $1, 2, 3, \dots, n$ ของลำดับตามที่กำหนด

➤ การหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้การสังเกต

พิจารณาการหาสองพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) 4, 7, 10, 13, ...

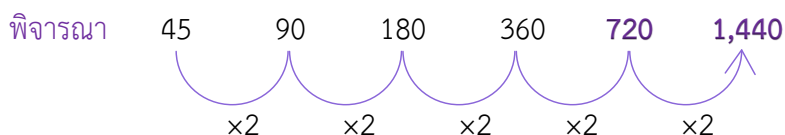


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นคงที่ทีละ 3

จะได้ พจน์สองพจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้น 3

ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับ 4, 7, 10, 13, ... คือ 16 และ 19
ตามลำดับ

2) 45, 90, 180, 360, ...

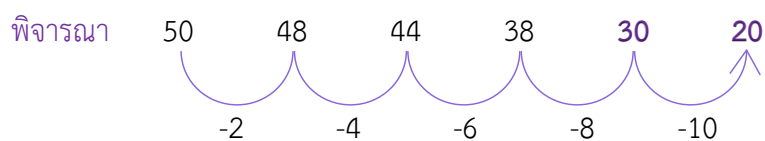


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า

จะได้ พจน์สองพจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า

ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับ 45, 90, 180, 360, ... คือ 720 และ 1440 ตามลำดับ

3) 50, 48, 44, 38, ...

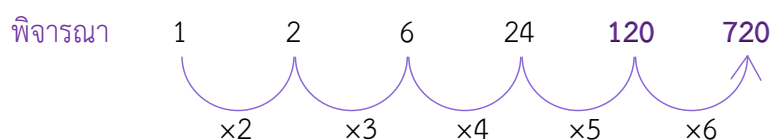


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะลดลง 2, 4, 6 ตามลำดับ

จะได้ พจน์สองพจน์ถัดไปของลำดับนี้จะลดลง 8 และ 10 ตามลำดับ

ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับ 50, 48, 44, 38 คือ 30 และ 20
ตามลำดับ

4) 1, 2, 6, 24, ...



พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 2, 3, 4 เท่าของพจน์ที่อยู่
ข้างหน้าตามลำดับ

จะได้ พจน์สองพจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 5 และ 6 เท่าของ
พจน์ที่อยู่ข้างหน้าตามลำดับ

ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับ 1, 2, 6, 24, ... คือ 120 และ 720
ตามลำดับ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้การสังเกต จะใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของ
แต่ละพจน์กับลำดับของพจน์

▲ ข้อตกลง เอกสารนี้ใช้ a_n แทนพจน์ทั่วไป หรือ พจน์ที่ n ของลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

1) 6, 11, 16, 21, 26, 31

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 6, 11, 16, 21, 26, 31

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะมากกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 5 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
6	11	16	21	26	31
$(5 \times 1) + 1$	$(5 \times 2) + 1$	$(5 \times 3) + 1$	$(5 \times 4) + 1$	$(5 \times 5) + 1$	$(5 \times 6) + 1$

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 5n + 1$

เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) 2, 4, 8, 16, 32, 64

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 2, 4, 8, 16, 32, 64

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	4	8	16	32	64
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 2^n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) 2, -6, 18, -54, 162

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 2, -6, 18, -54, 162

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะเป็น -3 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	-6	18	-54	162
$2 \times (-3)^{1-1}$	$2 \times (-3)^{2-1}$	$2 \times (-3)^{3-1}$	$2 \times (-3)^{4-1}$	$2 \times (-3)^{5-1}$

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$

เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4) $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{20}, \dots, \frac{40}{2560}$

พิเศษ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 4, 8, 12, ..., 40

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะมากกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 4 เสมอ

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	...	a_{10}	...
4	8	12	...	40	...
4×1	4×2	4×3	...	4×10	...

ตัวส่วน พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 5, 10, 20, ..., 2560

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	...	a_{10}	...
5	10	20	...	2560	...
$5 \times 2^{1-1}$	$5 \times 2^{2-1}$	$5 \times 2^{3-1}$...	$5 \times 2^{10-1}$...

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \frac{4n}{5 \times 2^{n-1}}$

เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์

1) $9, 3, -3, -9, -15, \dots$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $9, 3, -3, -9, -15, \dots$

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะน้อยกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 6 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
9	3	-3	-9	-15	...
$(-6)(1) + 15$	$(-6)(2) + 15$	$(-6)(3) + 15$	$(-6)(4) + 15$	$(-6)(5) + 15$...

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = -6n + 15$

2) $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปจะเป็น -2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
3	-6	12	-24	48	...
$3 \times (-2)^{1-1}$	$3 \times (-2)^{2-1}$	$3 \times (-2)^{3-1}$	$3 \times (-2)^{4-1}$	$3 \times (-2)^{5-1}$...

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของแต่ละพจน์กับลำดับของพจน์ ซึ่งในบางครั้งอาจจะไม่สะดวกที่จะใช้วิธีดังกล่าว อีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้หาพจน์ทั่วไป คือ การใช้ฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งจะกล่าวในลำดับต่อไป

➤ แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.2 (ก)



1. จงหาพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $-3, 1, 5, 9, 13, \dots$

.....

.....

2) $1, -3, 9, -27, 81, \dots$

.....

.....

3) $1, 2, 4, 7, 11, \dots$

.....

.....

4) $50, 47, 43, 38, 32, \dots$

.....

.....

5) $2, 2, 4, 12, 48, \dots$

.....

.....

2. จงหาสองพจน์ถัดไปของลำดับต่อไปนี้พร้อมบอกเหตุผล

ลำดับ	สองพจน์ถัดไป	เหตุผล
1) $4, 7, 10, 13, \dots$		
2) $5, 5, 5, 5, 5, \dots$		
3) $-2, -4, -6, -8, \dots$		
4) $5, 5, 10, 30, 120, \dots$		

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

1) $4, 2, 0, -2, -4$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $4, 2, 0, -2, -4$

พบว่า

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \dots\dots\dots$

2) $2, 6, 18, 54, 162, 486$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $2, 6, 18, 54, 162, 486$

พบว่า

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \dots\dots\dots$

3) $6, -12, 24, -48, 96, -192$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $6, -12, 24, -48, 96, -192$

พบว่า

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \dots\dots\dots$

4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

1) 7, 14, 28, 56, ...

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 7, 14, 28, 56, ...

พบว่า

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \dots$

2) $\frac{3}{8}, \frac{6}{15}, \frac{12}{22}, \frac{24}{29}, \dots$

พิเศษ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 3, 6, 12, 24, ...

พบว่า

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...

ตัวส่วน พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 8, 15, 22, 29, ...

พบว่า

พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \dots$

➤ การหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม

พิจารณา

1) ให้ $f(x) = 2x + 1$

พิจารณาค่าของ $f(x)$ และผลต่างของ $f(x)$ เมื่อ $x = 1, 2, 3, 4, 5$ ดังนี้

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	5	7	9	11
ผลต่างครั้งที่ 1		2	2	2	2

จะเห็นว่า $f(x) = 2x + 1$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 1 และมีผลต่างครั้งที่ 1 เป็นค่าคงตัวที่เท่ากับ 2 ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

2) ให้ $f(x) = 2x^2 + x + 1$

พิจารณาค่าของ $f(x)$ และผลต่างของ $f(x)$ เมื่อ $x = -2, -1, 0, 1, 2$ ดังนี้

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	7	2	1	4	11
ผลต่างครั้งที่ 1		-5	-1	3	7
ผลต่างครั้งที่ 2			4	4	4

จะเห็นว่า $f(x) = 2x^2 + x + 1$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2 และมีผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัวที่เท่ากับ 4 ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

3) ให้ $f(x) = 2x^3 + 1$

พิจารณาค่าของ $f(x)$ และผลต่างของ $f(x)$ เมื่อ $x = -1, 0, 1, 2, 3$ ดังนี้

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	17	55
ผลต่างครั้งที่ 1		2	2	14	38
ผลต่างครั้งที่ 2			0	12	24
ผลต่างครั้งที่ 3				12	12

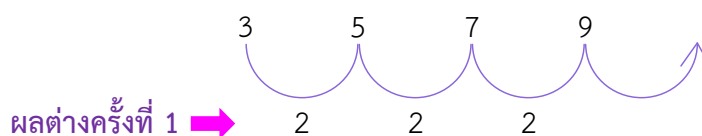
จะเห็นว่า $f(x) = 2x^3 + 1$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 3 และมีผลต่างครั้งที่ 3 เป็นค่าคงตัวที่เท่ากับ 12 ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

วิธีการหาพจน์ทั่วไปที่เป็นพหุนาม ทำได้โดยหาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัว แล้วนับว่าหาผลต่างครั้งที่เท่าใดจึงจะได้ค่าคงตัว ถ้าเป็นผลต่างครั้งที่ n พหุนามที่ใช้เป็นพจน์ทั่วไปจะเป็นพหุนามดีกรี n

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 3, 5, 7, 9, ... ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

วิธีทำ

หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ ได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 1 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 2

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an + b$

$$\text{จะได้} \quad a_1 = 3 = a + b \quad \text{.....(1)}$$

$$a_2 = 5 = 2a + b \quad \text{.....(2)}$$

$$a_3 = 7 = 3a + b \quad \text{.....(3)}$$

$$a_4 = 9 = 4a + b \quad \text{.....(4)}$$

$$(2) - (1)$$

$$\text{จะได้} \quad 5 - 3 = (2a + b) - (a + b)$$

$$2 = a$$

แทนค่า $a = 2$ ใน (1), (2), (3) หรือ (4) จะได้ $b = 1$

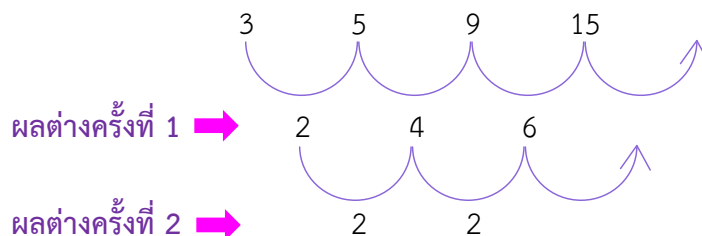
แทนค่า $a = 2$ และ $b = 1$ ใน $a_n = an + b$

$$\text{จะได้} \quad a_n = 2n + 1$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 2n + 1$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 3, 5, 9, 15, ... ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

วิธีทำ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 2

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_1 = 3 = a + b + c \quad \dots\dots(1)$

$$a_2 = 5 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots(2)$$

$$a_3 = 9 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots(3)$$

$$a_4 = 15 = 16a + 4b + c \quad \dots\dots(4)$$

(2) - (1) ได้สมการ $2 = 3a + b \quad \dots\dots(5)$

(3) - (2) ได้สมการ $4 = 5a + b \quad \dots\dots(6)$

(6) - (5)

จะได้ $2 = 2a$

$$a = 1$$

แทนค่า $a = 1$ ใน (5) หรือ (6) จะได้ $b = -1$

แทนค่า $a = 1$ และ $b = -1$ ใน (1), (2), (3) หรือ (4) จะได้ $c = 3$

แทนค่า $a = 1, b = -1$ และ $c = 3$ ใน $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_n = n^2 - n + 3$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = n^2 - n + 3$

กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 1.1.2



จุดประสงค์ : พัฒนาสมรรถนะสำคัญ และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เนื้อหา : การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

การแบ่งกลุ่ม: ทำเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน

วิธีปฏิบัติ : ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่าง ในหัวข้อ 1.1.2 และ ทำกิจกรรมที่ 1.1.2

ตอนที่ 1 : การแก้ปัญหาด้วยการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้การสังเกต

สถานการณ์ 1 ผู้จัดการแสดงจัดที่นั่งสำหรับผู้เข้าชมการแสดงในโรงละครแห่งหนึ่งดังนี้ แถวที่หนึ่ง 20 ที่นั่ง แถวที่สอง 22 ที่นั่ง แถวที่สาม 24 ที่นั่ง และเพิ่มที่นั่งแถวละ 2 ที่นั่ง เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนเต็มพื้นที่ในโรงละคร จงหาจำนวนที่นั่งที่จัดในแถวที่ n

วิธีทำ จำนวนที่นั่งที่จัดในแต่ละแถวสามารถเขียนเป็นลำดับ
พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ
พบว่า
พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	...

จะได้ $a_n =$

ดังนั้น จำนวนที่นั่งที่จัดในแถวที่ n เท่ากับ ที่นั่ง

สถานการณ์ 2 ถ้า นักเรียนตั้งใจออมเงินทุกวันดังนี้ วันที่หนึ่ง 20 บาท วันที่สอง 23 บาท วันที่สาม 26 บาท และออมเพิ่มวันละ 3 บาท เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงหาจำนวนเงินออมในวันที่ n

วิธีทำ จำนวนเงินออมในแต่ละวันสามารถเขียนเป็นลำดับ
 พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ
 พบว่า
 พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

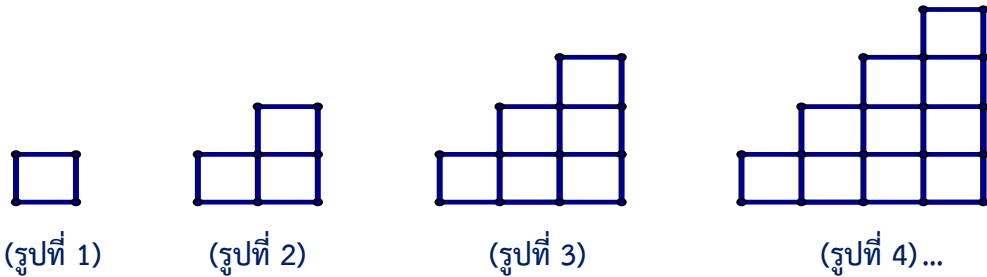
a_1	a_2	a_3	...

จะได้ $a_n = \dots\dots\dots$

ดังนั้น จำนวนเงินออมในวันที่ n เท่ากับ บาท

ตอนที่ 2 : การแก้ปัญหาด้วยการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม

สถานการณ์ 3 วิศวกรคนหนึ่งต้องการหาจำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามแบบรูปด้านล่างนี้



กำหนดให้ แทนเหล็กเส้นจำนวน 1 เส้น
 จงหาจำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามรูปที่ n

วิธีทำ จำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำตามแต่ละรูปสามารถเขียนเป็นลำดับ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

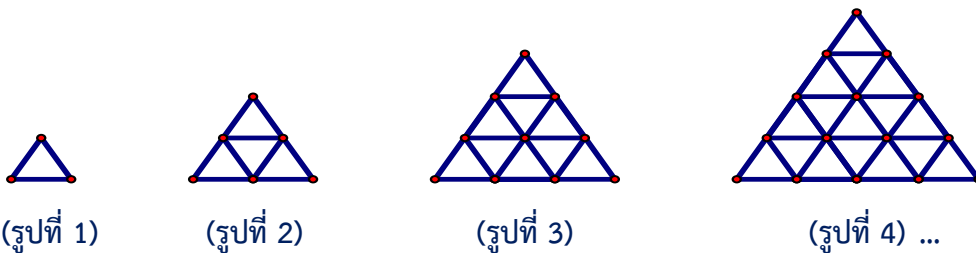
.....

.....

.....

ดังนั้น จำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามรูปที่ n เท่ากับ เส้น

สถานการณ์ 4 ช่างเชื่อมโลหะคนหนึ่งต้องการหาจำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามแบบรูปด้านล่างนี้



กำหนดให้ • แทนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กจำนวน 1 จุด
จงหาจำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามรูปที่ n

วิธีทำ จำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามแต่ละรูปสามารถเขียนเป็นลำดับ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

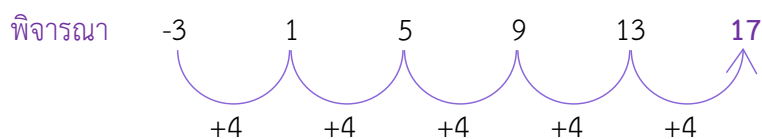
ดังนั้น จำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามรูปที่ n เท่ากับ จุด

➤ เฉลย แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.2 (ก)



1. จงหาพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $-3, 1, 5, 9, 13, \dots$

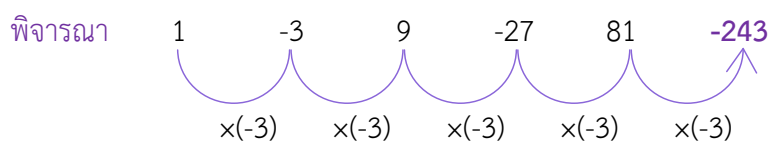


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นคงที่ทีละ 4

จะได้ พจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้น 4

ดังนั้น พจน์ถัดไปของลำดับ $-3, 1, 5, 9, 13, \dots$ คือ 17

2) $1, -3, 9, -27, 81, \dots$

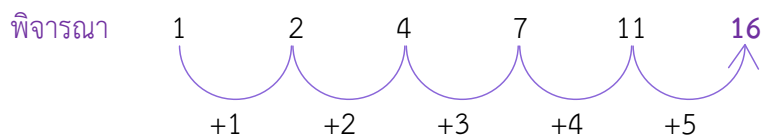


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเป็น -3 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า

จะได้ พจน์ถัดไปของลำดับนี้จะลดลงเป็น -3 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า

ดังนั้น พจน์ถัดไปของลำดับ $1, -3, 9, -27, 81, \dots$ คือ -243

3) $1, 2, 4, 7, 11, \dots$

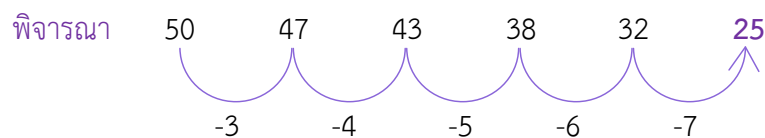


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้น 1, 2, 3, 4 ตามลำดับ

จะได้ พจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้น 5

ดังนั้น พจน์ถัดไปของลำดับ $1, 2, 4, 7, 11, \dots$ คือ 16

- 4) 50, 47, 43, 38, 32, ...

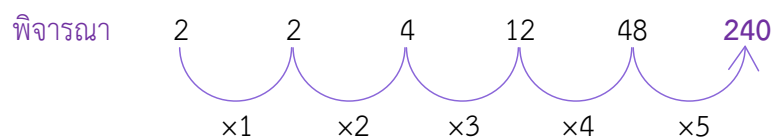


พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะลดลง 3, 4, 5, 6 ตามลำดับ

จะได้ พจน์ถัดไปของลำดับนี้จะลดลง 7

ดังนั้น พจน์ถัดไปของลำดับ 50, 47, 43, 38, 32, ... คือ 25

- 5) 2, 2, 4, 12, 48, ...



พบว่า พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 1, 2, 3, 4 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าตามลำดับ

จะได้ พจน์ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 5 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า

ดังนั้น พจน์ถัดไปของลำดับ 2, 2, 4, 12, 48, ... คือ 240

2. จงหาสองพจน์ถัดไปของลำดับต่อไปนี้พร้อมบอกเหตุผล

ลำดับ	สองพจน์ถัดไป	เหตุผล
1) 4, 7, 10, 13, ...	16, 19	พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นทีละ 3
2) 5, 5, 5, 5, 5, ...	5, 5	พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มเป็น 1 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า
3) -2, -4, -6, -8, ...	-10, -12	พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะลดลงคงที่ทีละ 2
4) 5, 5, 10, 30, 120, ...	600, 3600	พจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 1, 2, 3, 4, ... เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าตามลำดับ

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

1) 4, 2, 0, -2, -4

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 4, 2, 0, -2, -4

พบว่า พจน์ถัดไปจะน้อยกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 2 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
4	2	0	-2	-4
$(-2)(1) + 6$	$(-2)(2) + 6$	$(-2)(3) + 6$	$(-2)(4) + 6$	$(-2)(5) + 6$

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = -2n + 6$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) 2, 6, 18, 54, 162, 486

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 2, 6, 18, 54, 162, 486

พบว่า พจน์ถัดไปจะเป็น 3 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	6	18	54	162	486
$2 \times 3^{1-1}$	$2 \times 3^{2-1}$	$2 \times 3^{3-1}$	$2 \times 3^{4-1}$	$2 \times 3^{5-1}$	$2 \times 3^{6-1}$

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) 6, -12, 24, -48, 96, -192

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 6, -12, 24, -48, 96, -192

พบว่า พจน์ถัดไปจะเป็น -2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
6	-12	24	-48	96	-192
$6 \times (-2)^{1-1}$	$6 \times (-2)^{2-1}$	$6 \times (-2)^{3-1}$	$6 \times (-2)^{4-1}$	$6 \times (-2)^{5-1}$	$6 \times (-2)^{6-1}$

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 6 \times (-2)^{n-1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

1) 7, 14, 28, 56, ...

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 7, 14, 28, 56, ...

พบว่า พจน์ถัดไปจะเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...
7	14	28	56	...
$7 \times 2^{1-1}$	$7 \times 2^{2-1}$	$7 \times 2^{3-1}$	$7 \times 2^{4-1}$..

จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = 7 \times 2^{n-1}$

2) $\frac{3}{8}, \frac{6}{15}, \frac{12}{22}, \frac{24}{29}, \dots$

ตัวเศษ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 3, 6, 12, 24, ...

พบว่า พจน์ถัดไปจะเป็น 2 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้าเสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...
3	6	12	24	...
$3 \times 2^{1-1}$	$3 \times 2^{2-1}$	$3 \times 2^{3-1}$	$3 \times 2^{4-1}$...

ตัวส่วน พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 8, 15, 22, 29, ...

พบว่า พจน์ถัดไปจะมากกว่าพจน์ที่อยู่หน้าอยู่ 7 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

a_1	a_2	a_3	a_4	...
8	15	22	29	...
$(7 \times 1) + 1$	$(7 \times 2) + 1$	$(7 \times 3) + 1$	$(7 \times 4) + 1$...

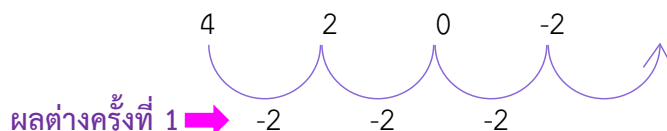
จะได้ พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \frac{3 \times (2^{n-1})}{7n + 1}$

➤ เฉลย แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.2 (ข)



1. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 4, 2, 0, -2, ... ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

วิธีทำ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ ได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 1 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ -2

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an + b$

จะได้ $a_1 = 4 = a + b$ (1)

$a_2 = 2 = 2a + b$ (2)

$a_3 = 0 = 3a + b$ (3)

$a_4 = -2 = 4a + b$ (4)

(2) - (1)

จะได้ $2 - 4 = (2a + b) - (a + b)$
 $-2 = a$

แทนค่า $a = -2$ ใน (1), (2), (3) หรือ (4) จะได้ $b = 6$

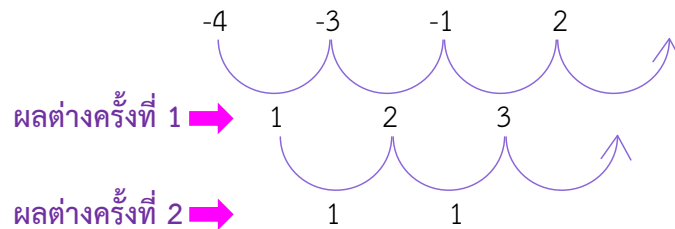
แทนค่า $a = -2$ และ $b = 6$ ใน $a_n = an + b$

จะได้ $a_n = -2n + 6$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = -2n + 6$

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $-4, -3, -1, 2, \dots$ ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

วิธีทำ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 1

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_1 = -4 = a + b + c \quad \dots\dots(1)$

$$a_2 = -3 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots(2)$$

$$a_3 = -1 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots(3)$$

$$a_4 = 2 = 16a + 4b + c \quad \dots\dots(4)$$

$$(2) - (1) \text{ ได้สมการ } 1 = 3a + b \quad \dots\dots(5)$$

$$(3) - (2) \text{ ได้สมการ } 2 = 5a + b \quad \dots\dots(6)$$

$$(6) - (5)$$

จะได้ $1 = 2a$

$$a = \frac{1}{2}$$

แทนค่า $a = \frac{1}{2}$ ใน (5) หรือ (6) จะได้ $b = -\frac{1}{2}$

แทนค่า $a = \frac{1}{2}$ และ $b = -\frac{1}{2}$ ใน (1), (2), (3) หรือ (4) จะได้ $c = -4$

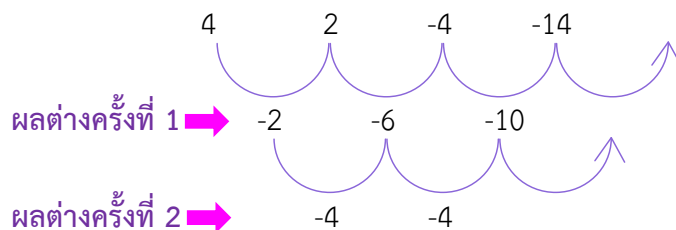
แทนค่า $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ และ $c = -4$ ใน $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 4$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 4$

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 4, 2, -4, -14, ... ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

วิธีทำ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ -4

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{จะได้} \quad a_1 = 4 = a + b + c \quad \dots\dots(1)$$

$$a_2 = 2 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots(2)$$

$$a_3 = -4 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots(3)$$

$$a_4 = -14 = 16a + 4b + c \quad \dots\dots(4)$$

$$(2) - (1) \text{ ได้สมการ} \quad -2 = 3a + b \quad \dots\dots(5)$$

$$(3) - (2) \text{ ได้สมการ} \quad -6 = 5a + b \quad \dots\dots(6)$$

$$(6) - (5)$$

$$\text{จะได้} \quad -4 = 2a$$

$$a = -2$$

แทนค่า $a = -2$ ใน (5) หรือ (6) จะได้ $b = 4$

แทนค่า $a = -2$ และ $b = 4$ ใน (1), (2), (3) หรือ (4) จะได้ $c = 2$

แทนค่า $a = -2, b = 4$ และ $c = 2$ ใน $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{จะได้} \quad a_n = -2n^2 + 4n + 2$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับ หรือ $a_n = -2n^2 + 4n + 2$

เฉลย กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 1.1.2



ตอนที่ 1 : การแก้ปัญหาด้วยการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้การสังเกต

สถานการณ์ 1 ผู้จัดการแสดงจัดที่นั่งสำหรับผู้เข้าชมการแสดงในโรงละครแห่งหนึ่งดังนี้ แถวที่หนึ่ง 20 ที่นั่ง แถวที่สอง 22 ที่นั่ง แถวที่สาม 24 ที่นั่ง และเพิ่มที่นั่งแถวละ 2 ที่นั่ง เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนเต็มพื้นที่ในโรงละคร จงหาจำนวนที่นั่งที่จัดในแถวที่ n

วิธีทำ จำนวนที่นั่งที่จัดในแต่ละแถวสามารถเขียนเป็นลำดับ 20, 22, 24, ...

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 20, 22, 24, ...

พบว่า พจน์ถัดไปจะมากกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 2 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

a_1	a_2	a_3	...
20	22	24	...
$(2 \times 1) + 18$	$(2 \times 2) + 18$	$(2 \times 3) + 18$...

จะได้ $a_n = 2n + 18$

ดังนั้น จำนวนที่นั่งที่จัดในแถวที่ n เท่ากับ $2n + 18$ ที่นั่ง

สถานการณ์ 2 ถ้า นักเรียน ตั้งใจออมเงินทุกวันดังนี้ วันที่หนึ่ง 20 บาท วันที่สอง 23 บาท วันที่สาม 26 บาท และออมเพิ่มวันละ 3 บาท เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงหาจำนวนเงินออมในวันที่ n

วิธีทำ จำนวนเงินที่ออมในแต่ละวันสามารถเขียนเป็นลำดับ 20, 23, 26, ...

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 20, 23, 26, ...

พบว่า พจน์ถัดไปจะมากกว่าพจน์ที่อยู่ข้างหน้าอยู่ 3 เสมอ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

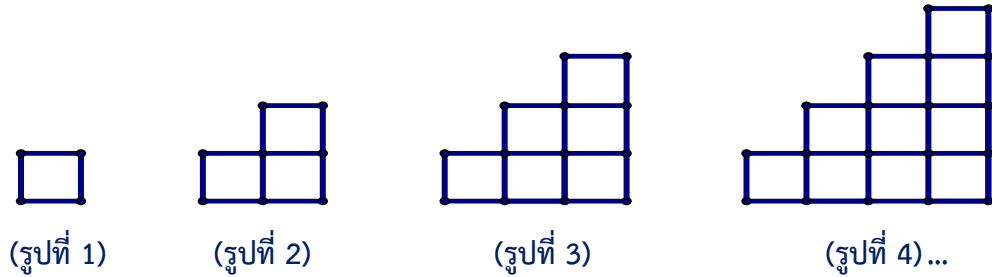
a_1	a_2	a_3	...
20	23	26	...
$3(1) + 17$	$3(2) + 17$	$3(3) + 17$...


จะได้ $a_n = 3n + 17$

ดังนั้น จำนวนเงินออมในวันที่ n เท่ากับ $3n + 17$ บาท

ตอนที่ 2 : การแก้ปัญหาด้วยการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม

สถานการณ์ 3 วิศวกรคนหนึ่งต้องการหาจำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามแบบรูปด้านล่างนี้



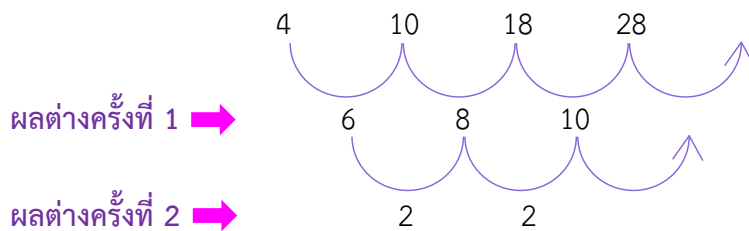
กำหนดให้  แทนเหล็กเส้นจำนวน 1 เส้น

จงหาจำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามรูปที่ n

วิธีทำ

จำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำตามแต่ละรูปสามารถเขียนเป็นลำดับ 4, 10, 18, 28, ...

หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 2

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_1 = 4 = a + b + c$ (1)

$a_2 = 10 = 4a + 2b + c$ (2)

$a_3 = 18 = 9a + 3b + c$ (3)

(2) - (1) ได้สมการ $6 = 3a + b$ (4)

(3) - (2) ได้สมการ $8 = 5a + b$ (5)

(5) - (4)

จะได้ $a = 1$

แทนค่า $a = 1$ ใน (4) หรือ (5) จะได้ $b = 3$

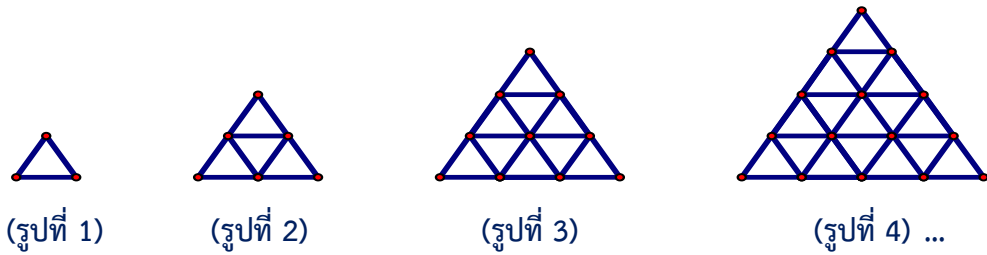
แทนค่า $a = 1$ และ $b = 3$ ใน (1), (2) หรือ (3) จะได้ $c = 0$

แทนค่า $a = 1$, $b = 3$ และ $c = 0$ ใน $a_n = an^2 + bn + c$

จะได้ $a_n = n^2 + 3n$

ดังนั้น จำนวนเหล็กเส้นที่ใช้ทำโครงสร้างตามรูปที่ n เท่ากับ $n^2 + 3n$ เส้น

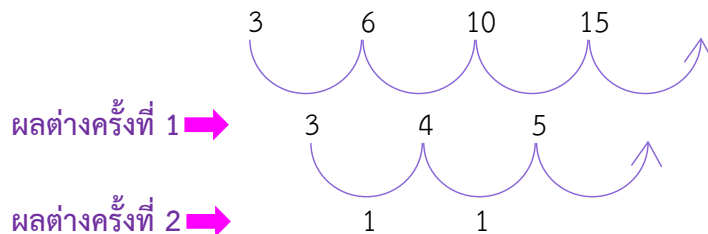
สถานการณ์ 4 ช่างเชื่อมโลหะคนหนึ่งต้องการหาจำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามแบบรูปด้านล่างนี้



กำหนดให้ • แทนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กจำนวน 1 จุด
จงหาจำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามรูปที่ n

วิธีทำ

จำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามแต่ละรูปสามารถเขียนเป็นลำดับ 3, 6, 10, 15, ...
หาผลต่างระหว่างสองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวดังนี้



พบว่า ผลต่างครั้งที่ 2 เป็นค่าคงตัว และมีค่าเท่ากับ 1

ให้ พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{จะได้} \quad a_1 = 3 = a + b + c \quad \dots\dots(1)$$

$$a_2 = 6 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots(2)$$

$$a_3 = 10 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots(3)$$

$$(2) - (1) \text{ ได้สมการ} \quad 3 = 3a + b \quad \dots\dots(4)$$

$$(3) - (2) \text{ ได้สมการ} \quad 4 = 5a + b \quad \dots\dots(5)$$

$$(5) - (4)$$

$$\text{จะได้} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\text{แทนค่า } a = \frac{1}{2} \text{ ใน (4) หรือ (5) จะได้ } b = \frac{3}{2}$$

$$\text{แทนค่า } a = \frac{1}{2} \text{ และ } b = \frac{3}{2} \text{ ใน (1), (2) หรือ (3) จะได้ } c = 1$$

$$\text{แทนค่า } a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \text{ และ } c = 1 \text{ ใน } a_n = an^2 + bn + c$$

$$\text{จะได้} \quad a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$$

$$\text{ดังนั้น จำนวนจุดที่ต้องเชื่อมเหล็กตามรูปที่ } n \text{ เท่ากับ } \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 \text{ จุด}$$



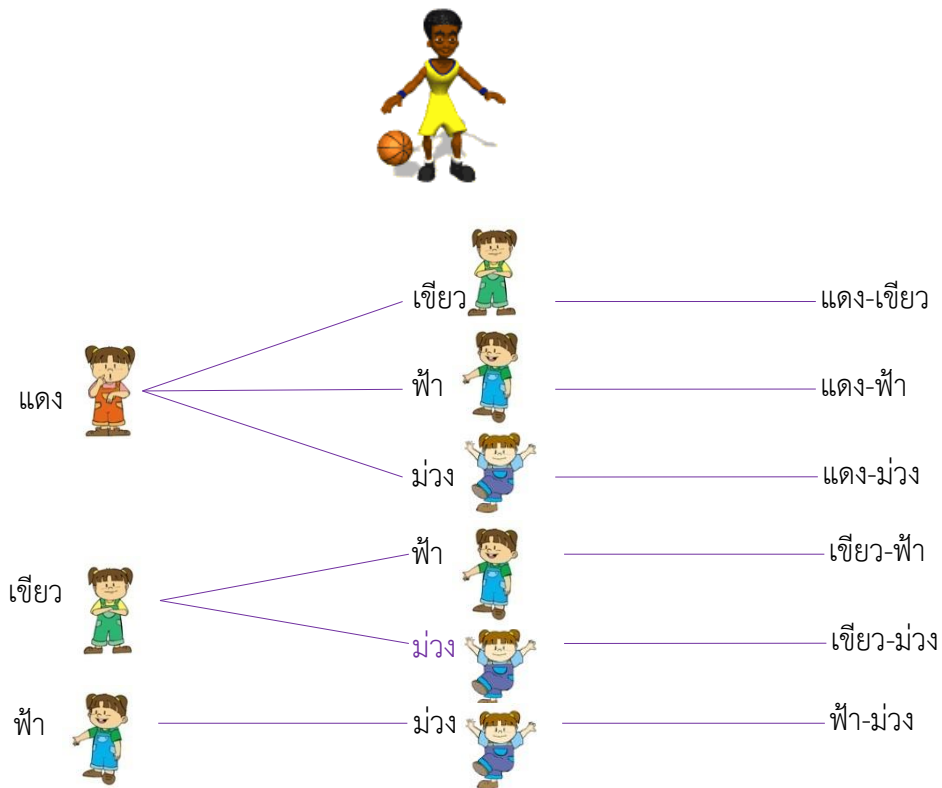
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

ความน่าจะเป็น (Probability)

2.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

2.1.1 แผนภาพต้นไม้

สถานการณ์ ในการจัดการแข่งขันกีฬาบาสเกตบอลในกิจกรรมกีฬาประจำปีของโรงเรียนศึกษานารี สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย 4 สี ได้แก่ สีแดง สีเขียว สีฟ้า และสีม่วง โดยจัดการแข่งขันให้แต่ละสีแข่งกับสีอื่นทุกสี สามารถใช้แผนภาพต้นไม้จัดคู่แข่งขันได้ดังนี้



จากรูปพบว่า จัดคู่แข่งขันได้ทั้งหมด 6 คู่ ได้แก่ แดง-เขียว, แดง-ฟ้า, แดง-ม่วง, เขียว-ฟ้า, เขียว-ม่วง และ ฟ้า-ม่วง

แผนภาพต้นไม้อาจแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม ดังนี้

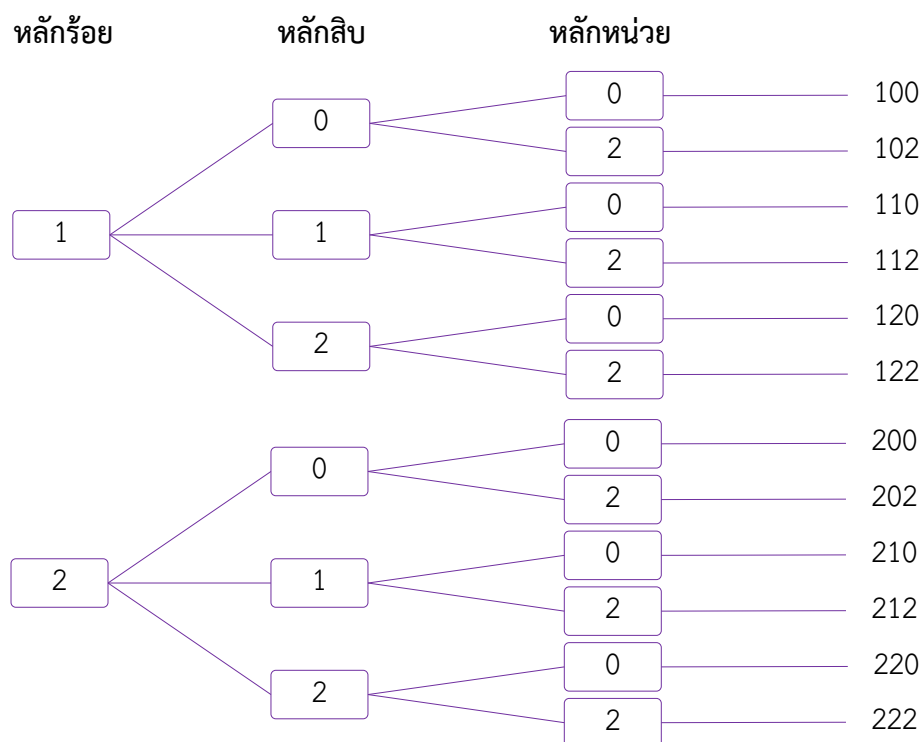
กลุ่มที่ 1 แผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

หมายถึง แผนภาพต้นไม้ซึ่ง แต่ละกิ่งที่แตกออกไปแล้วจะแตกกิ่งต่อกิ่งละเท่าๆกัน

กลุ่มที่ 2 แผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างไม่เป็นระเบียบ

หมายถึง แผนภาพต้นไม้ซึ่ง มีบางกิ่งที่แตกกิ่งต่อไม่เท่ากับการแตกกิ่งของกิ่งอื่น

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่วกสามหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1 หรือ 2



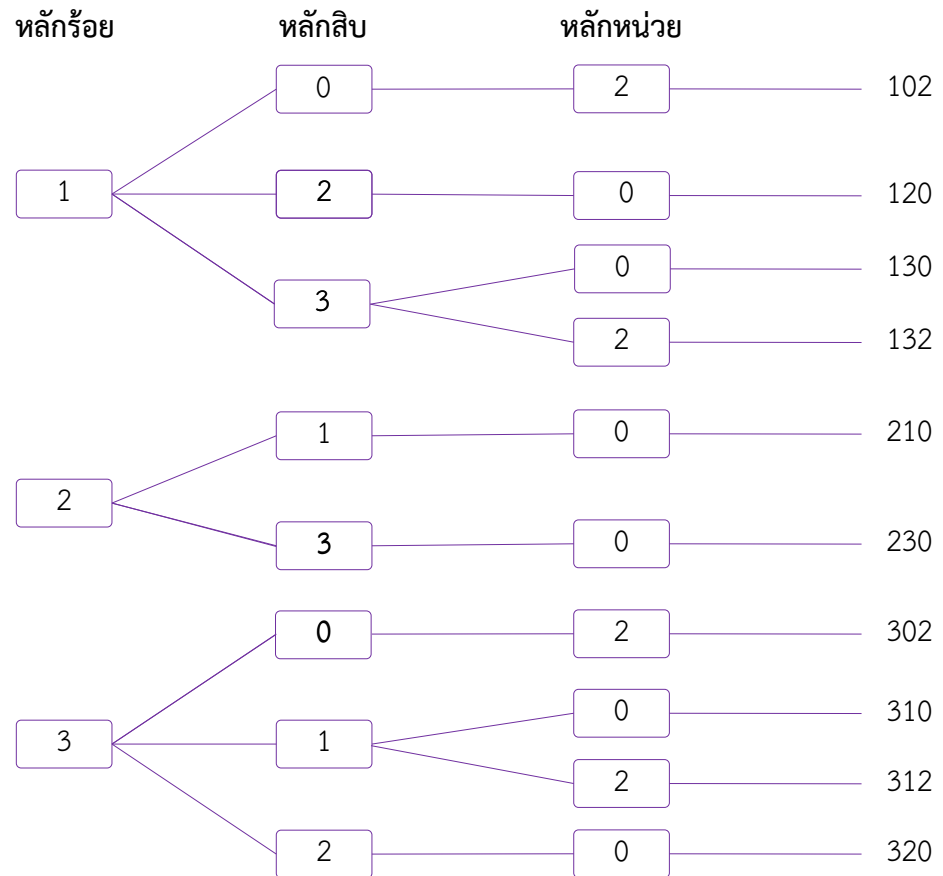
เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด 12 จำนวน ได้แก่ 100, 102, 110, 112, 120, 122, 200, 202, 210, 212, 220 และ 222

อย่าลืม! หลักแรกของจำนวนตั้งแต่สองหลักขึ้นไปต้องไม่เป็นศูนย์



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่บวกสามหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1, 2 หรือ 3 ให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างไม่เป็นระเบียบ

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด 10 จำนวน ได้แก่ 102, 120, 130, 132, 210, 230, 302, 310, 312 และ 320

➤ แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.1.1



1. จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่บวกสองหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1, 2 หรือ 3

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด จำนวน ได้แก่

2. จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่บวกสองหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1, 2, 3 หรือ 4 ให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด จำนวน ได้แก่

3. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 5\}$ จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกของ A และ b เป็นสมาชิกของ B

พบว่า มีคู่อันดับที่สร้างได้ทั้งหมด คู่ ได้แก่

4. การแข่งขันตอบปัญหาระหว่างทีม A และ ทีม B มีกติกาว่าทีมใดชนะครบ 2 เกมก่อนเป็นฝ่ายชนะ เช่น AA จงเขียนแผนภาพต้นไม้หาผลการแข่งขันที่ได้ทีมชนะ

พบว่า มีผลการแข่งขันที่ได้ทีมชนะทั้งหมด วิธี ได้แก่

5. ในการรับพนักงาน 2 คน เข้าทำงานพร้อมกัน จากผู้สมัคร 6 คน ได้แก่ ผู้สมัครหมายเลข 1, 2, 3, ..., 6 จงเขียนแผนภาพต้นไม้หาจำนวนวิธีรับพนักงานทั้งหมด

พบว่า จำนวนวิธีรับพนักงานทั้งหมดเท่ากับ วิธี

กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 2.1.1



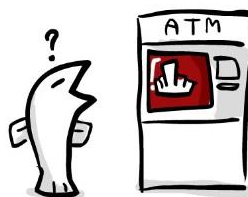
จุดประสงค์ : พัฒนาสมรรถนะสำคัญ และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เนื้อหา : แผนภาพต้นไม้

การแบ่งกลุ่ม : ทำเป็นคู่

วิธีปฏิบัติ : ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่าง ในหัวข้อ 2.1.1 และ ทำกิจกรรมที่ 2.1.1

สถานการณ์ 1 นักเรียนคนหนึ่ง เกิดวันที่ 24 เดือน 10 เขาต้องการนำเลขโดดจากเลขวันเกิด และเดือนเกิดมาสร้างรหัส ATM เป็นเลขโดด 4 ตัวไม่ซ้ำกัน โดยตัวที่หนึ่งเป็นเลขศูนย์ เช่น 0124 จงเขียนแผนภาพต้นไม้หารหัส ATM ที่นักเรียนคนนี้จะสร้างได้ทั้งหมด



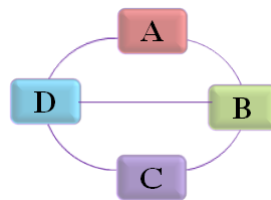
พบว่า รหัส ATM ที่นักเรียนคนนี้จะสร้างได้มีทั้งหมด รหัส

ได้แก่

สถานการณ์ 2 ผู้จัดการหอพักแห่งหนึ่งต้องการหาหมายเลขห้องพักที่เป็นจำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่า 300 และเลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 1, 2 หรือ 3 เช่น 311 จงเขียนแผนภาพต้นไม้ หาหมายเลขห้องที่ผู้จัดการหอพักคนนี้จะหาได้ทั้งหมด

พบว่า หมายเลขห้องที่ผู้จัดการคนนี้จะหาได้มีทั้งหมด หมายเลข
ได้แก่

สถานการณ์ 3 ทหารนายหนึ่งจะเดินผ่านสะพานข้ามไปยังเกาะ A B C และ D ให้ครบทุกเกาะไม่ให้ซ้ำสะพานและเกาะเดิม โดยเริ่มไปที่เกาะ A หรือเกาะ C เช่น ABCD จงเขียนแผนภาพต้นไม้ หาวิธีเดินทางของทหารนายนี้ทั้งหมด



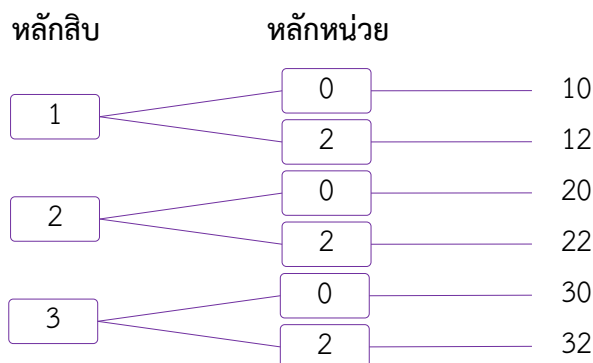
จากภาพ ให้ A, B, C และ D แทนเกาะ
และ เส้นที่ลากเชื่อมระหว่างเกาะ แทนสะพาน

พบว่า วิธีเดินทางของทหารนายนี้มีทั้งหมด วิธี
ได้แก่

➤ **เฉลย แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.1.1**



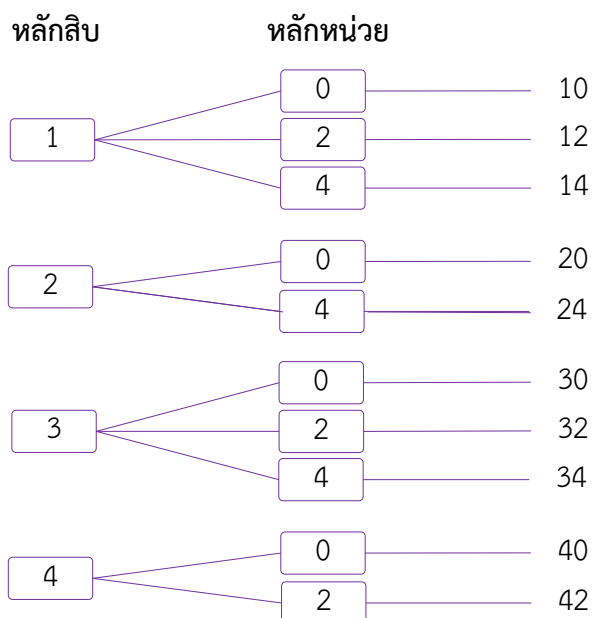
1. จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่วกสองหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1, 2 หรือ 3



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด 6 จำนวน ได้แก่ 10, 12, 20, 22, 30 และ 32

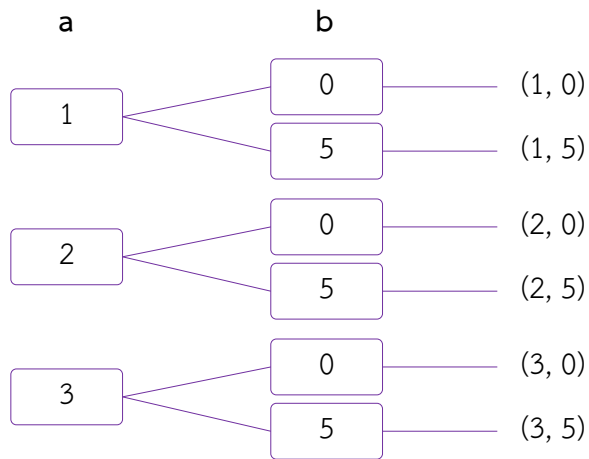
2. จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างจำนวนคู่วกสองหลักที่เลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 0, 1, 2, 3 หรือ 4 ให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างไม่เป็นระเบียบ

พบว่า มีจำนวนที่สร้างได้ทั้งหมด 10 จำนวน ได้แก่ 10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40 และ 42

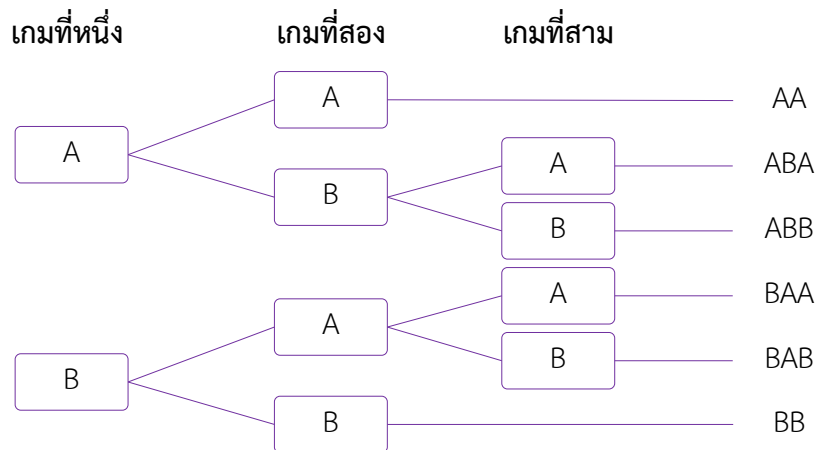
3. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 5\}$ จงเขียนแผนภาพต้นไม้สร้างคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกของ A และ b เป็นสมาชิกของ B



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า มีคู่อันดับที่สร้างได้ทั้งหมด 6 คู่ ได้แก่ $(1, 0)$, $(1, 5)$, $(2, 0)$, $(2, 5)$, $(3, 0)$ และ $(3, 5)$

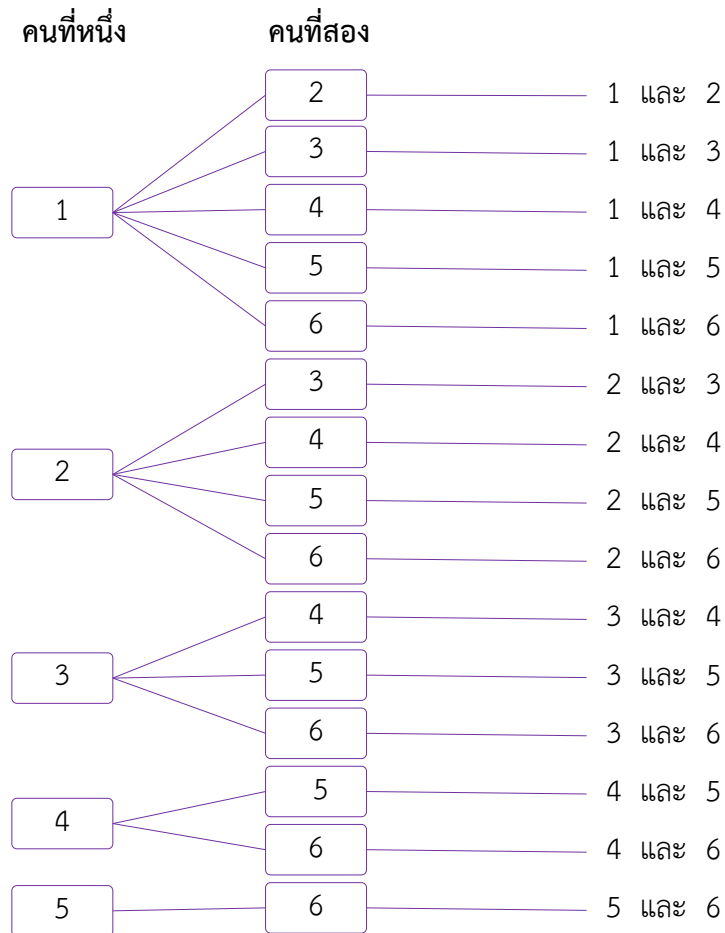
4. การแข่งขันตอบปัญหาระหว่างทีม A และ ทีม B มีกติกาว่าทีมใดชนะครบ 2 เกมก่อนเป็นฝ่ายชนะ เช่น AA จงเขียนแผนภาพต้นไม้หาผลการแข่งขันที่ได้ทีมชนะ



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างไม่เป็นระเบียบ

พบว่า มีผลการแข่งขันที่ได้ทีมชนะทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่ AA, ABA, ABB, BAA, BAB และ BB

5. ในการรับพนักงาน 2 คน เข้าทำงานพร้อมกัน จากผู้สมัคร 6 คน ได้แก่ ผู้สมัครหมายเลข 1, 2, 3, ..., 6 จงเขียนแผนภาพต้นไม้หาจำนวนวิธีรับพนักงานทั้งหมด



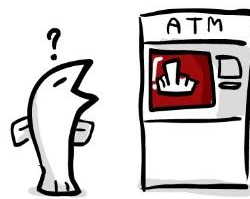
เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างไม่เป็นระเบียบ

พบว่า จำนวนวิธีรับพนักงานทั้งหมดเท่ากับ 15 วิธี

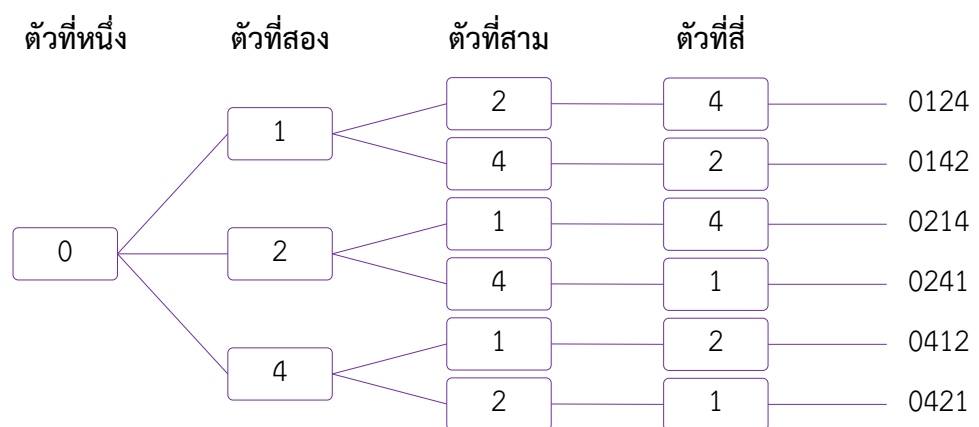
เฉลย กิจกรรมจำลองสถานการณ์ที่ 2.1.1



สถานการณ์ 1 นักเรียนคนหนึ่ง เกิดวันที่ 24 เดือน 10 เขาต้องการนำเลขโดดจากเลขวันเกิด และเดือนเกิดมาสร้างรหัส ATM เป็นเลขโดด 4 ตัวไม่ซ้ำกัน โดยตัวที่หนึ่งเป็นเลขศูนย์ เช่น 0124 จงเขียนแผนภาพต้นไม้หารหัส ATM ที่นักเรียนคนนี้จะสร้างได้ทั้งหมด



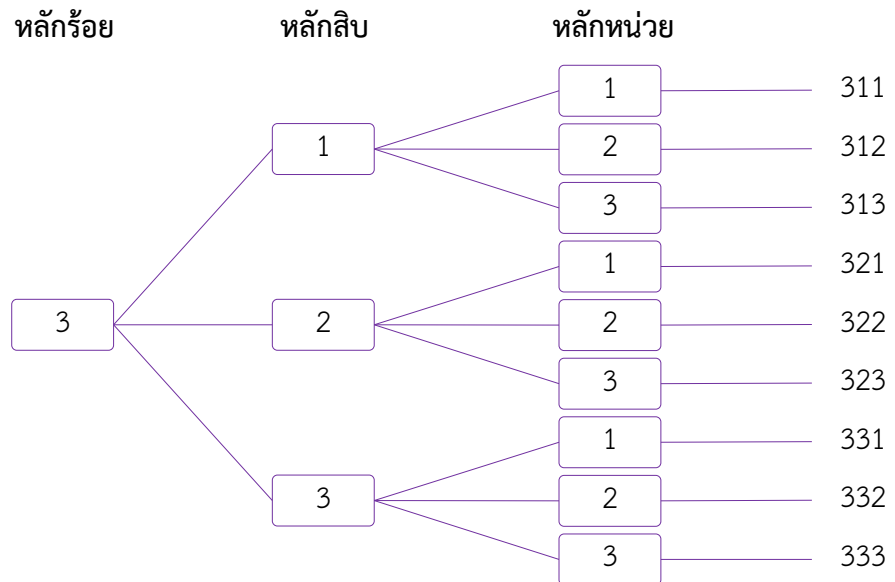
วันที่ 24 เดือน 10 ประกอบด้วยเลขโดด 4 ตัวต่างกัน ได้แก่ 0, 1, 2 และ 4



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า รหัส ATM ที่นักเรียนคนนี้จะสร้างได้มีทั้งหมด 6 รหัส ได้แก่ 0124, 0142, 0214, 0241, 0412 และ 0421

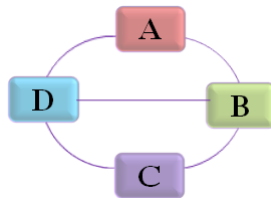
สถานการณ์ 2 ผู้จัดการหอพักแห่งหนึ่งต้องการหาหมายเลขห้องพักที่เป็นจำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่า 300 และเลขโดดประจำแต่ละหลักเป็น 1, 2 หรือ 3 เช่น 311 จงเขียนแผนภาพต้นไม้ หาหมายเลขห้องที่ผู้จัดการหอพักคนนี้จะหาได้ทั้งหมด



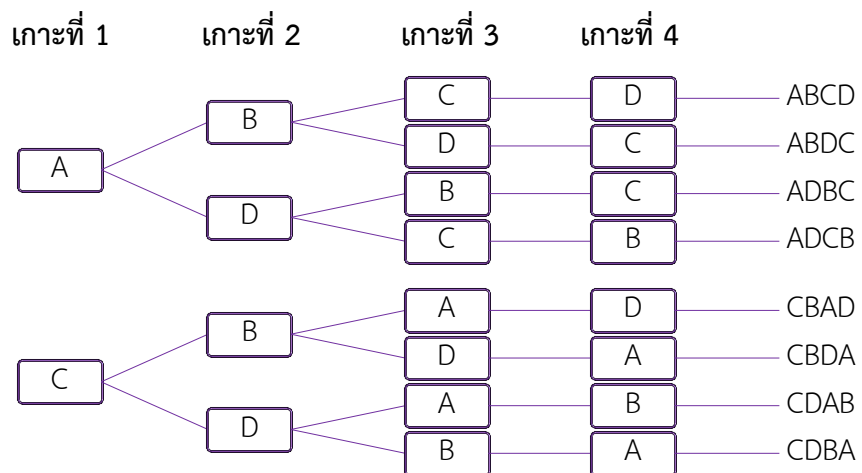
เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า หมายเลขห้องที่ผู้จัดการคนนี้จะหาได้มีทั้งหมด 9 หมายเลข ได้แก่ 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332 และ 333

สถานการณ์ 3 ทหารนายหนึ่งจะเดินผ่านสะพานข้ามไปยังเกาะ A B C และ D ให้ครบทุกเกาะ ไม่ให้ซ้ำสะพานและเกาะเดิม โดยเริ่มไปที่เกาะ A หรือเกาะ C เช่น ABCD จงเขียนแผนภาพต้นไม้ หาวิธีเดินทางของทหารนายนี้ทั้งหมด



จากภาพ ให้ A, B, C และ D แทนเกาะ
และ เส้นที่ลากเชื่อมระหว่างเกาะ แทนสะพาน



เป็นแผนภาพต้นไม้ที่แตกกิ่งอย่างเป็นระเบียบ

พบว่า วิธีเดินทางของทหารนายนี้ทั้งหมด 8 วิธี ได้แก่ ABCD, ABDC, ADBC, ADCB, CBAD, CBDA, CDAB และ CDBA

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ. **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค015**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, ม.ป.ป.
กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ตามหลักสูตร แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). **แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิดตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่ง
ประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา
ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา
ลาดพร้าว
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา
ลาดพร้าว
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา
ลาดพร้าว
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค.
ลาดพร้าว
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค015**. กรุงเทพฯ :
ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, ม.ป.ป.
- สุวดี ทองประศรี. (2553) **เอกสารประกอบการเรียนรู้ด้วยตนเองเรื่องลำดับและอนุกรม**.
กรุงเทพฯ : โรงเรียนศึกษานารี, (อัดสำเนา)

ภาคผนวก

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ และผู้เชี่ยวชาญ
ด้านเนื้อหาสาระของเอกสารประกอบการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค 32101)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาสาระในเอกสารประกอบการเรียนรู้
 รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค 32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ดังนี้

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1. อาจารย์ ดร. ขวัญ เพี้ยซ้าย | อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|

ผู้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาสาระในเอกสารประกอบการเรียนรู้
 รายวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค 32101) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ดังนี้

- | | | |
|--------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. นางสุนันทา | ต้นติวณิชย์ | ครูชำนาญการพิเศษ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนศึกษารี |
| 2. นางสุวดี | ทองประศรี | ครูชำนาญการพิเศษ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนศึกษารี |
| 3. นางสาวสุจินันท์ | บุญพัฒนาภรณ์ | อาจารย์
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
(ฝ่ายมัธยม) |

ประวัติย่อผู้จัดทำ

ชื่อ - ชื่อสกุล	นางสาวนงศ์เพ็ญ ทองเลิศ
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	11/274 ม.1 ถนนสุขสวัสดิ์ แขวงบางปะกอก เขตราชบุรีบูรณะ กรุงเทพฯ 10140
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนศึกษานารี เขตธนบุรี กรุงเทพฯ 10600
การศึกษา	การศึกษาระดับบัณฑิต (กศบ.) วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ. 2546